

3

ביה"ס למדעי המחשב ומהמטיקה. תשנ"ז. מבנים אלגבריים.
 סמסטר א', מועד א'.
 שם המרצה: ד"ר נ. מוזיצ'וק.
 משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק דף נוסחאות אחד מגודל A4. אסור להשתמש בכל סוגים של מחשיבוניס.

חלק א': בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.

15 נקודות

1. תהי $G = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$. נגדיר מעל G פעולה בינרית ע"י הנוסחה:
 $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad+b)$
 הוכח ש- G תהיה חבורה ביחס לפעולה הנ"ל.

15 נקודות

2. הוכח שכל תת-חבורה של חבורה ציקלית היא גם חבורה ציקלית.

20 נקודות

3. יהי $a \in K$ איבר כלשהו של שדה K .
 א. הוכח ש- $F = \left\{ \begin{pmatrix} u & av \\ v & u \end{pmatrix} \mid u,v \in K \right\}$ הוא חוג ביחס לפעולות חיבור וכפל של מטריצות.
 ב. הוכח שאם לפולינום $x^2 - a$ אין שורשים ב- K , אזי F שדה.

חלק ב': בחלק זה יש לבחור 5 מתוך 6 שאלות.

10 נקודות

4. תהי G תת-חבורה ציקלית של S_5 , הנוצרת ע"י התמורה $f = (1,2,3)(4,5)$. אזי
 א. $[S_5 : G] = 20$
 ב. אף אחת מהתשובות הנותרות איננה מתאימה.
 ג. $[S_5 : G] = 10$
 ד. $[S_5 : G] = 12$
 ה. $[S_5 : G] = 17$

$$\frac{S_5}{G} = \frac{5!}{6} = 20$$

10 נקודות

5. תהי $209x + 437y = d$ משוואה לינארית בשלמים אשר d עשוי להיות מספר שלם כלשהו. אזי
 א. אף אחת מהתשובות הנותרות איננה מתאימה.
 ב. אם למשוואה הנ"ל יש פתרון, אזי d מתחלק ב-19.
 ג. לכל d למשוואה הנ"ל תמיד יש פתרון בשלמים אחד לפחות.
 ד. אם למשוואה הנ"ל יש פתרון, אזי d מתחלק ב-11.
 ה. לכל d למשוואה הנ"ל קיים פתרון בשלמים אחד לפחות.

3

10.6 נקודות.

לשום את שני קוסטינס ימנייה (מולקורט ימניות) כלשהם של חבורה S_5 למי
 תת-חבורה ציקלית H הנוצרת ע"י היתמורה $f = (1,2,3,4,5)$.

$H \leq f$
 5

--	--

10.7 נקודות.

נתונה מערכת משוואות לינאריות שהמקדמים שלה שייכים לשדה Z_5 :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

אזי מספר פתרונות של המערכת הנחיל שווה ל-

א. ∞

ב. אף אחת מהתשובות הנותרות איננה מתאימה.

ג. 0.

ד. 1.

ה. 3.

10.8 נקודות.

נתונות שתי תמורות $f = (1,2,3)(6,8)$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

	א. חשב את $f^{-1}g^2$:
	ב. פרק את $f^{-1}g^2$ למכפלה של מחזורים זרים:
	ג. מצא סדר של f :
	ד. פרק את f למכפלה של חילופים:

10.9 נקודות.

פרק את פולינום $a(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x + 1 \in Z_5[x]$ לנוכפלה של פולינומים אי-פריקים

--	--

בהצלחה!